Đại học Quốc gia Hà Nội
Trường Đại học Công nghệ

80

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH II

HỌC KỲ II NĂM HỌC 2004 – 2005

Thời gian làm bài: 180' không kể thời gian phát đề

I.

a) Phát biểu và chứng minh định lý Schwarz về tính đối xứng của các đạo hàm riêng cấp cao.

b) Áp dụng: Xét hàm hai biến $f(x, y)$ cho bởi:

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \text{ nếu } (x, y) \neq (0, 0)$$
$$\text{và } f(0, 0) = 0.$$

Bằng việc tính toán trực tiếp, chứng minh rằng $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$. Hãy giải thích vì sao định lý Schwarz không áp dụng được cho trường hợp này.

II. Khảo sát cực trị của hàm số sau (biện luận theo giá trị của tham số a)

$$f(x, y) = (a^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4axy$$

III. Cho tích phân 2 lớp:

$$I = \iint_D x^2 y\,dx\,dy \text{ với } D = \{(x, y)/0 \leq y,\ x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$$

a) Vẽ miền lấy tích phân.

b) Tính tích phân.

IV. Tính tích phân mặt

$$I = \iint_{S^+} (y - z)dy\,dz + (z - x)dz\,dx + (x - y)dx\,dy$$

ở đây S^+ là mặt phía ngoài của mặt $x = \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9}$ (lấy trên đoạn $0 \leq x \leq h^2$)

(*Hướng dẫn*: áp dụng công thức Ostrogradxki).

V. Tìm nghiệm của phương trình vi phân

$$y'' \cos y + (y')^2 \sin y = y'$$

thỏa mãn các điều kiện đầu $y(-1) = \dfrac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$.

ĐÁP ÁN ĐỀ GIẢI TÍCH (1)

(Đề chính thức)

I) a). Định lý Schwarz: Nếu hàm $f(x,y)$ có đạo hàm
(2) hỗn hợp $f''_{xy}(x,y)$ và $f''_{yx}(x,y)$ trong lân cận U của (x^0,y^0)
và liên tục tại (x^0,y^0). Khi đó $f''_{xy}(x^0;y^0)=f''_{yx}(x^0;y^0)$.

<u>Chứng minh</u>: Chọn s, t đủ nhỏ sao cho $(x^0+t,y^0),(x^0,y^0+s)\in U$

đặt $g(x,y)=f(x+t,y)-f(x,y)$

$h(x,y)=f(x,y+s)-f(x,y)$

~~Khi đó~~ $\cancel{g(x^0,y^0+s)-g(x^0,y^0)=f(x^0+t)}$

$\cancel{=f(x^0+t,y^0)-f(x^0,y^0)}$

Khi đó $g(x^0,y^0+s)-g(x^0,y^0)=f(x^0+t,y^0+s)-f(x^0,y^0+s)$

(1) $-f(x^0+t,y^0)+f(x^0,y^0)=f(x^0+t,y^0+s)-f(x^0+t,y^0)$

$-[f(x^0,y^0+s)-f(x^0,y^0)]=h(x^0+t,y^0)-h(x^0,y^0)$

Áp dụng liên tiếp định lý Lagrange về số gia giới nội ta có

$g(x^0;y^0+s)-g(x^0;y^0)=s\,g'_y(x^0,y^0+\theta_1 s)$

$=s[f'_y(x^0+t,y^0+\theta_1 s)-f'_y(x^0,y^0+\theta_1 s)]$

$=st\,f''_{yx}(x^0+\theta_2 t,\ y^0+\theta_1 t)\ (0<\theta_1,\theta_2<1$

Tương tự

$h(x^0+t,y^0)-h(x^0,y^0)=st\,f''_{xy}(x^0+\lambda_1 t,\ y^0+\lambda_2 t)$

$(0<\lambda_1,\lambda_2<1)$

Cho s, t → 0 ta có $f''_{xy}(x^0,y^0)=f''_{yx}(x^0,y^0)$

2

Áp dụng: Xét $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$

$f(0,0) = 0$

$f'_y(x,y)$ $\quad f'_y(x,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(x,y)}{y}$

$$= \lim_{y\to 0} x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = x.$$

$$f'_x(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = -y.$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0\ ,\quad f'_x(0,0) = 0.$$

vậy $f''_{yx}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-0}{x} = 1$

1 t.tự $f''_{xy}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y-0}{y} = -1$

từ đó ta thấy $f''_{xy}(0,0) = -1 \neq 1 = f''_{yx}(0,0)$

Sở dĩ như vậy vì các hàm đạo hàm hỗn hợp

1/2 $\quad f''_{xy}(x,0) = -1 \neq 0 \quad \forall x\neq 0$

$f''_{yx}(0,y) = 1 \neq 0 \quad \forall y\neq 0$

Các hàm này không liên tục tại $(0,0)$.

II) Tìm các điểm dừng

$f'_x(x,y) = 2(a^2+1)x + 4ay = 0$

$f'_y(x,y) = 2(a^2+1)y + 4ax = 0$

Định thức của hệ $D = \begin{vmatrix} 2(a^2+1) & 4a \\ 4a & 2(a^2+1) \end{vmatrix} = 0$

1/2 $(a^2+1)^2 - 4a^2 = 0$ $\quad (t+1)^2 - 4t = 0$

$t+1 = \pm 2t \Rightarrow (t \mp 1)^2 = 0 \quad a^2 \pm 1 = 0 \Rightarrow |a| = \pm 1$

Trường hợp 1 $|a| \neq 1$ điểm dừng duy nhất $(0,0)$

Trường hợp 2 $a = +1$ $\cancel{(a^2+1)x + 2ay = 0}$

$4x + 4y = 0 \quad x = -y$

Trường hợp 3 $a = -1$ $\quad 4x - 4y = 0 \quad x = y$

Xét trường hợp $|a| \neq 1$ $\quad f''_{x^2}(0,0) = 2(a^2+1)$, $f''_{y^2}(0,0) = 2(a^2+1)$

$f''_{xy}(0,0) = 4a \quad \Delta = 4(a^2+1)^2 - 16a^2 = 4a^4 + 8a^2 + 4 - 16a^2$

$\Delta = \cancel{4(a^2)\,[(a^2+1) - a]\,[(a^2+1)+a]}$ $\quad 4a^4 - 8a^2 + 4$

$= 4(a^2-1)^2 \geq 0$

1/2 Hàm số có cực tiểu tại $(0,0)$

T.hợp $a = +1$ ta có $f(x,y) =$

1/2 $f(x,y) = 2(x^2+y^2) + 4xy = 2(x+y)^2 \geq 0 = f(x,-x)$

$a = -1$ $\quad f(x,y) = 2(x^2+y^2) - 4xy = 2(x-y)^2 \geq 0 = f(x,x)$

.) Tính tích phân hai lớp

(4)

$$I = \iint_D x^2 y \, dx\, dy \quad \text{với } D = \{(x,y) \mid 0 \le y,\ x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$$

(2)

Miền D giới hạn bởi $y = 0$ và cung đường tròn

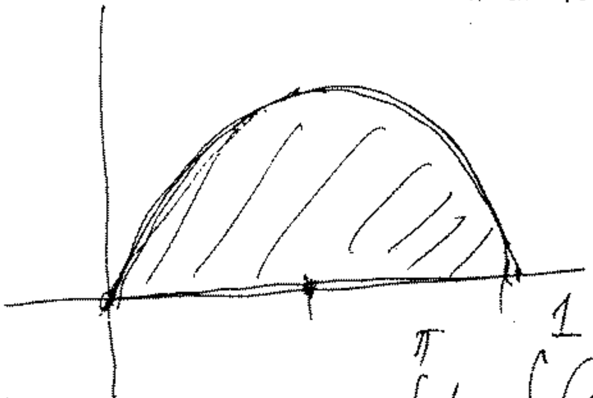
$(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

Đưa vào phép biến tọa độ

$x = 1 + \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$0 \leq \rho \leq 1 \quad 0 \leq \theta \leq \pi$



$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)} = \rho \qquad I = \int_0^\pi d\theta \int_0^1 (1+\rho\cos\theta)^2 \rho\sin\theta \, \rho\, d\rho$$

$$= \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^1 \rho^2 (1 + 2\rho\cos\theta + \rho^2\cos^2\theta)\, d\rho$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{5}\cos^2\theta\right)\sin\theta \, d\theta$$

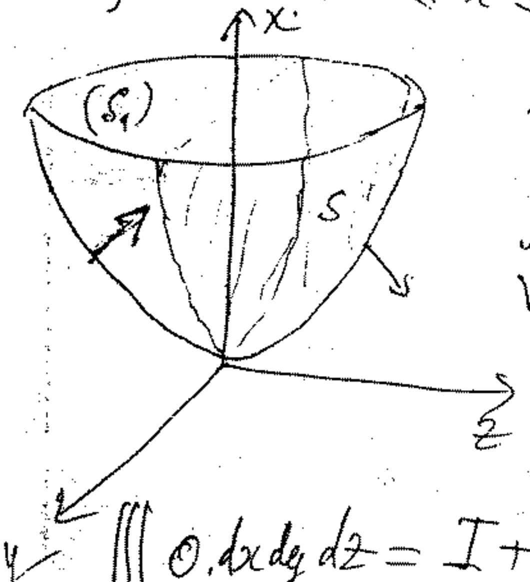
$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{5}\right) du = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{3} + \frac{u^2}{5}\right) du = \frac{2}{3} + \frac{2}{15} = \frac{4}{5}$$

S

IV) Tính tích phân mặt

1) $I = \iint_{S^+} (y-z)dydz + (z-x)dzdx + (x-y)dxdy$

S^+ phía mặt phía ngoài của mặt $x = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$
(lấy trên đoạn $0 \le x \le h^2$)



Áp dụng công thức Oxtrogradxki

$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$

$= \iint_{S^+} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

$\iiint_V 0.dxdydz = I + \iint_{S_1} (y-z)dydz$

$I = -\iint_{S_1} (y-z)dydz = \iint_D (y-z)dydz$

$\iint (y-z)dydz = 0$.

$\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \le h^2$

) Giải phương trình vi phân $y''\cos y + (y')^2\sin y = y'$ với đ.k $y(-1) = \pi/6$, $y'(-1) = 2$

6

Đặt $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dy} = pp'$ thay vào có pt

$p.p'\cos y + p^2\sin y = p$, $p \neq 0$ chia 2 vế cho p

1/2 $p'\cos y + p\sin y = 1 \Rightarrow \dfrac{dp}{dy}\cos y + p\sin y = 1$ (1)

1/2 (1) có nghiệm riêng $p(y) = \sin y$

+ pt thuần nhất tương ứng $p'\cos y + p\sin y = 0 \Rightarrow \dfrac{dp}{p} = -\dfrac{\sin y\, dy}{\cos y}$

$\ln|p| = \ln\cos y + \overline{C_1} = \ln|C_1\cos y| \Rightarrow p(y) = C_1\cos y$

Nghiệm t/q của pt (1) $p(y) = \sin y + C_1\cos y$

Từ đk $y'(-1) = 2$, $y(-1) = \pi/6$ có $2 = \sin\frac{\pi}{6} + C_1\cos\pi/6$

1/2 $\Rightarrow C_1 = \sqrt{3} \Rightarrow p(y) = \sin y + \sqrt{3}\cos y = y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{\sin y + \sqrt{3}\cos y} = dx = \frac{1}{2}\,\frac{dy}{\frac{1}{2}\sin y + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos y} = dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{dy}{\cos(y - \pi/6)} = dx \Rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{du}{\cos u} = dx \quad (u = y - \pi/6$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = x + \overline{C_2} \qquad \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{y - \pi/6}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = x + \overline{C_2}$$

$\ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 2x + 2\overline{C_2}$

$tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = e^{2x}.\overline{C_2}$

$tg\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{12}\right) = \overline{C_2}e^{2x}$

1/2 $tg\left(\frac{\pi}{6} +\right.$

$$\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right| = -1 + \overline{C_2}$$

$\overline{C_2} = 1$

Nghiệm t/q $\dfrac{1}{2}\ln\left|tg\dfrac{y - \pi/6}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right| = x + 1$

$\frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{y}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\right| = x + 1$

4