Đại học Quốc gia Hà Nội
Trường Đại học Công nghệ

ĐỀ THI MÔN GIẢI TÍCH II
HỌC KỲ II NĂM HỌC 2004 – 2005

2đ

Thời gian làm bài: 180' không kể thời gian phát đề

I. Hãy kiểm tra xem các phát biểu sau là đúng hay sai. Cho giải thích

a) Nếu $f(a)$ tồn tại và hàm $f(x)$ có giới hạn khi x tiến tới a thì f liên tục tại a.

b) Hàm hai biến $f(x, y)$ liên tục theo từng biến tại $M_0 = (x_0, y_0)$ thì sẽ liên tục tại M_0.

c) Việc thay đổi thứ tự lấy đạo hàm đối với các biến không làm thay đổi giá trị của các đạo hàm (hỗn hợp) cấp 2 tại những điểm mà các đạo hàm đó tồn tại.

d) Một hàm số chỉ có thể đạt các giá trị cực trị tại các điểm dừng.

e) Một hàm số có các đạo hàm riêng cấp 1 trong miền xác định D và không có điểm dừng nào trong D vẫn có thể có cực trị trong D.

2đ

II. Khảo sát cực trị có điều kiện của hàm số sau:

$$f(x, y) = e^{-x^2 - y^2 - 2x + y}$$

với điều kiện $x^2 + y^2 = 2$.

(*Hướng dẫn*: Đưa điều kiện đã cho về phương trình tham số hóa).

2đ

III. Sử dụng các tọa độ trụ hoặc cầu, tính tích phân sau:

đề số 7 Tr12

$$I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x - x^2}} dy \int_0^3 z\sqrt{x^2 + y^2}\, dz$$

2đ

IV. Tính tích phân đường loại 2

đề số 58, tr46

$$I = \oint_C x^2 y\, dx - xy^2\, dy$$

với C là chu vi của miền phẳng giới hạn bởi các đường cong $x^2 + y^2 = 2x$, $y = -x$, $y = 0$, C được định hướng theo chiều dương (ngược kim đồng hồ).

2đ

V. Tìm nghiệm của phương trình vi phân

$$yy' = (y')^2 + e^x$$

(*Hướng dẫn:* đạo hàm phương trình này để dẫn về hệ tương đương gồm hai phương trình vi phân).

ĐÁP ÁN ĐỀ THI LẠI
GIẢI TÍCH II

I. a) Sai. Cần thêm điều kiện $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) Sai. Phản ví dụ

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 - xy + y^2} \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(0,0) = 0$$

hàm này liên tục theo từng biến tại $(0,0)$ song $f(x, tx) = \dfrac{t}{1-t+t^2}$ tiến tới các giới hạn khác nhau (theo t) khi $x \to 0$.

c) Sai. Cần thêm giả thiết các đạo hàm riêng hỗn hợp liên tục tại các điểm đó

d) Sai. Hàm số có thể đạt cực trị tại các điểm không khả vi

e) Đúng. Cực trị có thể đạt trên biên.

II) Từ tính chất đồng biến của hàm e^t, bài toán đưa về xét cực trị của hàm hai biến $g(x,y) = -(x^2+y^2) - 2x + y$ với đk $x^2 + y^2 = 2$.

Tham số hoá điều kiện $x^2+y^2 = 2$ bằng cách đặt $x = \sqrt{2}\cos t$, $y = \sqrt{2}\sin t$ ta đưa về xét cực trị tự do của

$$F(t) = g(x,y)\Big|_{x^2+y^2=2} = g(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = -2 - 2\sqrt{2}\cos t + \sqrt{2}\sin t$$

$F'(t) = \sqrt{2}\cos t + 2\sqrt{2}\sin t$

$F'(t) = 0 \Rightarrow \cos t = -2\sin t \Rightarrow 5\sin^2 t = 1,\ \sin^2 t = \frac{1}{5}$

pt có 2 nghiệm $t = \alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\quad \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$t = \beta \Leftrightarrow \sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}\quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

t	0		α		β		2π
$F'(t)$		+	0	−	0	+	
$F(t)$		↗		↘		↗	

Như vậy $g(x,y)$ và $f(x,y)$ có cực trị tại $\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$\left(2\sqrt{\frac{2}{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$

III) Miền lấy tích phân $V = \{(x,y,z) / 0 \le x \le 2,$
$0 \le y \le \sqrt{2x - x^2},\ 0 \le z \le 3\}$

V = phần hình trụ đáy là $1/2$ hình tròn $y^2 + (x-1)^2 = 1$

Đưa về hệ trụ $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z$

phương trình cung tròn

$0 \le \rho\cos\theta \le 2$

$\rho^2\sin^2\theta = -\rho^2\cos^2\theta + 2\rho\cos\theta \Rightarrow \rho = 2\cos\theta$

Miền được xét $0 \le \rho\cos\theta \le 2$

$0 \le \rho \le 2\cos\theta$

$0 \le \theta \le \pi/2$

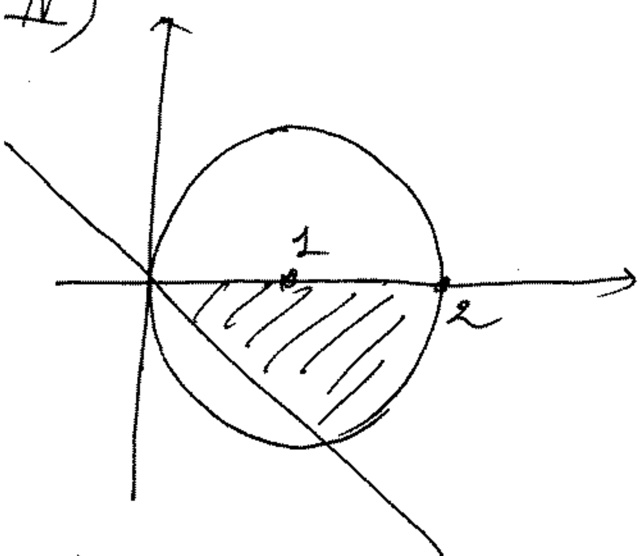
$$I=\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} dr \int_0^3 z.r^2 dz$$

$$=\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^2 dr \frac{9}{2} = \frac{9}{2}\int_0 \frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta} = \cancel{\frac{9}{8}}$$

$$=\frac{9}{6}\int_0^{\pi/2} 8\cos^3\theta\, d\theta = 12\int_0 (1-\sin^2\theta)\, d\sin\theta$$

$$=12\left(\sin\theta\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{3}\sin^3\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = 8.$$

IV)



Miền lấy tích phân như hình vẽ.

Áp dụng công thức Green ta được

$$I=\iint_D (-y^2-x^2)\,dxdy$$

Chuyển qua tọa độ cực $I=\int_{-\pi/4}^{0} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr$

$$=-\int_{-\pi/4}^{0} \frac{r^4}{4}\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi = -4\int_{-\pi/4}^{0} \cos^4\varphi\, d\varphi$$

$$=-4\int_{-\pi/4}^{0}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi = -\int_{-\pi/4}^{0}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi.$$

$$= -\frac{3}{2}\varphi \Big|_{-\pi/4}^{0} - \sin 2\varphi \Big|_{-\pi/4}^{0} - \frac{1}{8}\sin 4\varphi \Big|_{-\pi/4}^{0} = -\left(\frac{3\pi}{8}+1\right)$$

V

Đạo hàm phương trình này

$$(y')^2 + yy'' = 2y'y'' + e^x$$

Trừ đi pt ban đầu

$$yy'' - yy' = 2y'y'' - 2(y')^2$$

$$y(y'' - y') = 2y'(y'' - y')$$

$$(y'' - y')(y - 2y') = 0$$

pt 1 $\quad y = 2y' \Rightarrow \dfrac{dy}{y} = \dfrac{1}{2}dx$

$\ln y = \dfrac{1}{2}x \qquad y(x) = \lambda e^{x/2}$

pt 2 $\quad y' = y'' \Rightarrow$ đặt $y' = p \Rightarrow p = p'$

$\dfrac{dp}{p} = dx \Rightarrow \quad p = y' \Rightarrow \ln y' = x \Rightarrow y' = e^x$

hệ nghiệm $\quad y_1(x) = \lambda e^{x/2}, \; y_2(x) = \mu e^x + \nu$

Thay vào pt ban đầu $\quad \frac{1}{2}\lambda^2 e^x = \frac{1}{4}\lambda^2 e^x + e^x$

$\lambda^2 = 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2$

Nghiệm $\quad y = 2e^{x/2}$ và $y = -2e^{x/2}$